Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Institut für Theoretische Physik I
Christoph Baumann
christoph.baumann@tp1.hhu.de
Raum 25.32.01.47

Düsseldorf, den 01.08.2020

# F-Praktikumsversuch:
Strahlung geladener Teilchen in starken elektromagnetischen Feldern

## Einführung

In diesem Praktikumsversuch soll das Strahlungsverhalten eines einzelnen Elektrons in starken elektromagnetischen Feldern untersucht werden. Dazu wird zuerst die Bewegungsgleichung ohne Bremsstrahlung aus einem Ansatz für relativistische Teilchen hergeleitet. Erste Programmieraufgaben werden hier mit analytischen Vorhersagen verglichen. Im zweiten Teil des Praktikums werden die Bewegungsgleichungen durch einen Strahlungsterm ergänzt. Hierzu wird ein Ansatz aus der klassischen Feldtheorie zur Beschreibung klassischer Bremsstrahlung herangezogen. Das zugehörige Programm basiert auf einer Modifizierung des bereits vorhandenen Programms aus dem ersten Programmierteil.

Um die Programme der einzelnen Kapitel zu testen und mehr über die Physik hinter den Formeln zu lernen, stehen drei Anwendungsbeispiele zur Auswahl. Im ersten Beispiel ist das Elektron einem starken, statischen homogenen B-Feld ausgesetzt. Ohne Bremsstrahlung wird sich das Elektron in diesem Feld auf einer Spirale bewegen. Beim Einschalten der Bremsstrahlung strahlt das Elektron jedoch Energie ab und ändert seinen Gyroradius. In der zweiten Anwendung wird ein Elektron in einem rotierenden elektrischen Feld simuliert. Für die klassische Bewegung ohne Bremsstrahlung ergibt sich hier im allgemeinen Fall eine überlagerte Bewegung zwischen einer Gyration und einer Driftbewegung. Beim Einschalten der Bremsstrahlung wird wie im ersten Beispiel Energie abgestrahlt und das Elektron synchronisiert seine Rotationsbewegung mit dem E-Feld. Im dritten Beispiel wirkt ein konstantes elektrisches Feld auf ein Elektron, welches ohne Bremsstrahlung in seinem momentanen Ruhesystem konstant beschleunigt wird. Berücksichtigt man Bremsstrahlungseffekte bei hohen Energien, sieht man, dass die Energieaufnahme aus dem Feld für das Elektron verlangsamt wird, im Rahmen der hier vorgestellten Theorie jedoch nie unterbunden werden kann.

In den nächsten Kapiteln werden Aufgaben, die der Vorbereitung dienen, in gelbe Kästen gestellt. Sie sollen für das Antestat bearbeitet werden. Von den drei oben vorgestellten Anwendungsbeispielen soll EINES durchgeführt werden.

Als Programmiersprache empfehlen wir Python oder Matlab. Für diejenigen, die noch nie programmiert haben, liegt eine Einführung in Matlab bereit. Diese sollte vor dem Antestat ebenfalls durchgearbeitet werden! Eine Auswahl an sehr guter Literatur zu den einzelnen Themengebieten liegt ebenfalls bei. Diese sollte durchgearbeitet werden, damit ausreichendes Hintergrundwissen im Antestat vorliegt.

# I Bewegung ohne Strahlungsdämpfung

Der Bewegung eines geladenen Teilchens mit Ruhemasse $m_0$ und Ladung $q$ in einem elektromagnetischen Feld mit Vektorpotential $\vec{A}$ und elektrostatischem Potential $\phi$ liegt folgende Lagrange-Funktion zugrunde (siehe Landau und Lifschitz, §16ff.):

$$L(\vec{r},\vec{v},t) := -m_0c^2\sqrt{1-\frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A} - q\phi = -\frac{1}{\gamma}m_0c^2 + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A} - q\phi.$$

Hierbei sind $\vec{r}$ und $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ die Position und die Geschwindigkeit des Teilchens, $c$ ist die Lichtgeschwindigkeit und

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}} = \sqrt{1+\frac{|\vec{p}|^2}{m_0^2c^2}}$$

beschreibt den Lorentz-Faktor des Teilchens. Mit dem kanonischen Impuls

$$\vec{\Pi} = \vec{\nabla}_{\vec{v}}L(\vec{r},\vec{v},t)$$

und der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\Pi}}{\mathrm{d}t} = \vec{\nabla}L(\vec{r},\vec{v},t)$$

findet man jeweils eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\vec{r}$. Zum Programmieren eignet es sich jedoch besser, ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung zu finden, das diesem entspricht. Dazu transformieren wir die Lagrange-Funktion mittels einer Legendre-Transformation zur Hamilton-Funktion

$$H(\vec{r},\vec{\Pi},t) = c\sqrt{m_0^2c^2 + \left(\vec{\Pi} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2} + q\phi.$$

Um die Bewegung eines geladenen Teilchens zu simulieren, betrachten wir den kinetischen Impuls $\vec{p} = m_0\gamma\vec{v}$, der uns sofort Auskunft über die kinetische Energie gibt.

Zeigen Sie die Zusammenhänge

$$\vec{\Pi} = \vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A} \quad \text{und} \quad E_{\text{kin}} = \sqrt{m_0^2c^4 + (\vec{p}c)^2} - m_0c^2.$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\nabla}_{\vec{\Pi}}H(\vec{r},\vec{\Pi},t), \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{\Pi}}{\mathrm{d}t} = -\vec{\nabla}H(\vec{r},\vec{\Pi},t).$$

Stellt man hierauf aufbauend ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung für $\vec{r}$ und $\vec{p}$ auf und substituiert $\vec{A}$ und $\phi$ durch das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{B}$ gemäß

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A},$$

so erhält man die Bewegungsgleichungen eines geladenen Teilchens in einem äußeren elektromagnetischen Feld:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{B}, \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{p}}{m_0\gamma}. \tag{1}$$

Bevor wir mit den Programmierarbeiten beginnen, transformieren wir unsere Koordinaten, um lästige Faktoren in den Bewegungsgleichungen zu eliminieren. Betrachten Sie hierzu die normierten Variablen mit Tilde

$$\begin{aligned}
e\vec{A}/\left(m_0c^2\right) &=: \tilde{\vec{A}} \to \vec{A}, & e\vec{E}/(m_0c\omega) &=: \tilde{\vec{E}} \to \vec{E}, & \omega t &=: \tilde{t} \to t,\\
e\phi/\left(m_0c^2\right) &=: \tilde{\phi} \to \phi, & e\vec{B}/(m_0c\omega) &=: \tilde{\vec{B}} \to \vec{B}, & \vec{r}\,\omega/c &=: \tilde{\vec{r}} \to \vec{r},\\
q/e &=: \tilde{q} \to q, & \vec{p}/(m_0c) &=: \tilde{\vec{p}} \to \vec{p}, & \vec{v}/c &=: \tilde{\vec{v}} \to \vec{v}.
\end{aligned}$$

Die hier auftretenden Faktoren sind die Lichtgeschwindigkeit $c$, die Elementarladung $e$, die Masse des simulierten Teilchens $m_0$ und eine aufgabenspezifische Frequenz $\omega$. Da nun alle Variablen eine Tilde haben, merken wir uns einfach, dass es sich um normierte Variablen handelt und lassen die Tilde wieder weg.

Geben Sie die Bewegungsgleichungen (1) in den neuen Variablen an!

## II Bewegung mit Strahlungsdämpfung

Ein beschleunigtes Elektron strahlt elektromagnetische Wellen ab, welche wiederum die Bewegung des Elektrons beeinflussen. Um diesen Effekt zu berücksichtigen, wird eine sog. Dämpfungskraft (radiation reaction) in die klassischen Bewegungsgleichungen integriert. Dies wird besonders wichtig, wenn die Feldstärken im Ruhesystem des Teilchens von der gleichen Größenordnung wie das Schwingerfeld $E_s = (m_e^2c^3)/(e\hbar)$ sind.

Welche physikalische Bedeutung hat das Schwingerfeld?

In vielen Fällen der Ansatz aus (siehe Landau und Lifschitz, §76ff.) verwendet. Wir leiten daher nun einen relativistischen Ausdruck für die Strahlungsdämpfung her, der auch für $v/c \approx 1$ richtig ist. Dazu betrachten wir die kovariante Formulierung der Bewegungsgleichung eines relativistischen Teilchens mit Ladung $q$, Masse $m_0$ und Vierergeschwindigkeit $u = (\gamma, \gamma\vec{v}/c)$:

$$m_0c\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} = \frac{q}{c}\sum_k F^{ik}u_k + g^i, \quad i = 0,1,2,3.$$

Hierbei ist $F^{ik}$ der antisymmetrische elektromagnetische Feldtensor und $g^i$ die Dämpfungskraft. Der relativistische Viererimpuls ist in dieser Notation $p^i = m_0cu^i$ und es gilt

$$u^i = \frac{dx^i}{\mathrm{d}s} \quad \text{mit} \quad \mathrm{d}s = \frac{c}{\gamma}\mathrm{d}t.$$

In der Lorentz-Abraham-Dirac Form ist die Dämpfungskraft

$$g^i = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\left(\frac{\mathrm{d}^2u^i}{\mathrm{d}s^2} - \sum_k u^iu^k\frac{\mathrm{d}^2u_k}{\mathrm{d}s^2}\right).$$

Als nächstes ersetzen wir die Ableitungen in $g^i$ durch den Feldstärke Tensor und nehmen dabei an, dass $(\mathrm{d}g^i)/(\mathrm{d}s) \approx 0$. Dadurch erhalten wir einen vollständigen Satz von Bewegungsgleichungen, in dem auf der rechten Seite nur noch einfache Ableitungen $\propto (\partial F^{ik})/(\partial x^l)$ auftauchen.
Die mit $(\partial F^{ik})/(\partial x^l)$ assoziierte Kraft resultiert durch eine Spin-Feld-Kopplung und wird im Folgenden ignoriert. Bauen wir die so genäherte Dämpfungskraft in die Bewegungsgleichungen ein, erhalten wir

$$m_0 c \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} = \frac{q}{c} \sum_k F^{ik} u_k - \frac{2}{3} \frac{e^4}{m_0^2 c^5} \sum_k \sum_l F^{ik} F_{lk} u^l + \frac{2}{3} \frac{e^4}{m_0^2 c^5} \sum_k \sum_l \sum_m (F_{lk} u^k)(F^{lm} u_m) u^i.$$

Für unsere Simulationen ist es interessant zu wissen, welche Gleichungen für $\vec{p}$ und $\vec{r}$ daraus folgen. Darum substituieren wir jetzt

$$-F^{ki}(\vec{E},\vec{B}) = F^{ik}(\vec{E},\vec{B}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_{ik}(\vec{E},\vec{B}) = F^{ik}(-\vec{E},\vec{B})$$

und normalisieren unsere Variablen wie in Kapitel I. Die vollständigen Bewegungsgleichungen, die die relativistische Strahlungsdämpfung berücksichtigen, sind also:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} &= \vec{v} = \frac{\vec{p}}{\gamma}, \\ \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} &= q\left(\vec{E} + \frac{\vec{p}}{\gamma} \times \vec{B}\right) + \Lambda\left(\vec{E}\left(\vec{v}\cdot\vec{E}\right) + \left(\vec{E}\times\vec{B}\right) + \vec{B}\times\left(\vec{B}\times\vec{v}\right)\right) \\ &\qquad - \Lambda\gamma^2 \vec{v}\left(\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)^2 - \left(\vec{v}\cdot\vec{E}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Bei der Normalisierung der Variablen sind einige Faktoren und Zahlen durch den Parameter $\Lambda$ zusammengefasst worden. Finden Sie heraus welche! (siehe Lehmann und Spatschek, Phys. Rev. E **85**, 056412 )

Da wir die relativistische Bewegung geladener Teilchen untersuchen, ist $\gamma \gg 1$ und wir können die Bewegungsgleichungen noch einmal vereinfachen, in dem wir nur die Terme mitnehmen, die mit $\gamma^2$ skalieren:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} &= \vec{v} = \frac{\vec{p}}{\gamma}, \\ \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} &= q\left(\vec{E} + \frac{\vec{p}}{\gamma}\times\vec{B}\right) - \Lambda\frac{\vec{p}}{\gamma}\left(\left(\gamma\vec{E} + \vec{p}\times\vec{B}\right)^2 - \left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right)^2\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Berechnen Sie die Leistung, die das Elektron durch die Strahlungsdämpfung verliert.

## III Das numerische Verfahren

Wir definieren jetzt

$$f_p(\vec{r},\vec{p},t) := \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}, \qquad f_r(\vec{r},\vec{p},t) := \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

und gehen von infinitesimalen Differenzen über zu endlichen Differenzen ($d \to \Delta$). Dadurch ersetzen wir alle Ableitungen durch Differenzenquotienten und erhalten die lineare Näherung

$$\vec{p}(t+\Delta t) = \vec{p}(t) + f_p(\vec{r},\vec{p},t)\Delta t, \qquad \vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + f_r(\vec{r},\vec{p},t)\Delta t. \tag{3}$$

Geben wir nun einen Startort $\vec{r}_0$ und einen Startimpuls $\vec{p}_0$ für ein Teilchen vor, so können wir mit Hilfe dieser Gleichungen den Ort $\vec{r}_n := \vec{r}(t_n)$ und den Impuls $\vec{p}_n := \vec{p}(t_n)$ zu jeder Zeit $t_n = n\Delta t$ angeben, indem wir obiges Gleichungssystem $n$-mal rekursiv lösen. In der Numerik ist dieses Verfahren auch als *explizites Euler-Verfahren* bekannt.

Plotten wir alle Punkte $\vec{r}_0, \vec{r}_1, ..., \vec{r}_n$ in ein Koordinatensystem, so wissen wir, wohin das Teilchen geflogen ist und wie es abgelenkt wurde. Die Wirkung externer E- und B- Feld auf die Trajektorie eines geladenen Teilchens kann so studiert werden.

Auf den folgenden drei Seiten finden Sie drei einfache Beispiele, die unter Vernachlässigung von Strahlungsdämpfung analytisch berechnet werden können. EINES dieser Beispiele soll im Rahmen des Praktikums analytisch berechnet und numerisch simuliert werden.

# Beispiel 1: homogenes B-Feld

**Teil 1**

Betrachten Sie ein Elektron, das im Ursprung $\vec{r}_0 = \vec{0}$ in Richtung $\vec{p}_0 = P_0\,(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$ startet. Die externen Felder seien $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_z$ und $\vec{E} = \vec{0}$.

Normieren Sie ihre Variablen mit der Zyklotronfrequenz $\omega = (eB_0)/(m_0 c)$ des Elektrons. Stellen Sie die normierten Bewegungsgleichungen (1) auf und lösen Sie sie! Plotten Sie die analytische Lösung $\vec{r}(t)$ für $t \in [0, 4\pi\gamma]$.

Simulieren Sie die Flugbahn des Elektrons und vergleichen Sie sie mit der analytischen Vorhersage! Wie ändert sich die Genauigkeit der numerisch gelösten Bahn für sehr kleine $\Delta t$? Wie klein muss $\Delta t$ gewählt werden, damit die maximale absolute Abweichung zwischen den Komponenten der analytisch berechneten Bahn und der numerischen Simulation am Ende der Simulation kleiner als $10^{-3}$ ist? Was passiert, wenn $\Delta t$ fixiert ist und $t$ sehr groß wird? Wie wirkt sich die Wahl von $P_0$ auf den Fehler der Simulation aus?

**Teil 2**

Betrachten Sie ein Elektron, das im Ursprung $\vec{r}_0 = \vec{0}$ in Richtung $\vec{p}_0 = P_0\,(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$ startet. Die externen Felder seien $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_z$ und $\vec{E} = \vec{0}$. $B_0$ sei dabei so gewählt, dass der Dämpfungsparameter $\Lambda = 1 \cdot 10^{-3}$ bei einer Normierung der Bewegungsgleichung mit der Zyklotronfrequenz $\omega = (eB_0)/(m_0 c)$ ist.

Schätzen Sie das Fernverhalten der Lösung der Bewegungsgleichungen mit Strahlungsdämpfung (2) für $t \to \infty$ ab. Überlegen Sie sich dazu, welche Funktion die einzelnen Terme in Gleichung (2) haben.

Simulieren Sie die Flugbahn des Elektrons über einen Zeitraum, in dem ein ungebremstes Teilchen zehn Umläufe absolviert und vergleichen Sie sie mit der analytischen Vorhersage für den ungedämpften Fall! Vergleichen Sie auch die simulierte zeitliche Entwicklung von $\vec{p}(t)$ mit den analytischen Abschätzungen! Wie ändern sich die Simulationsergebnisse für verschiedene $B_0$, $\vec{r}_0$ und $\vec{p}_0$?

# Beispiel 2: rotierendes E-Feld

**Teil 1**

Betrachten Sie ein Elektron, das im Ursprung $\vec{r}_0 = \vec{0}$ in Richtung $\vec{p}_0 = P_0\,\vec{e}_z - (qE_0/\omega)\,\vec{e}_y$ startet. Die externen Felder seien $\vec{B} = \vec{0}$ und $\vec{E} = E_0\,(\cos(\omega t)\,\vec{e}_x + \sin(\omega t)\,\vec{e}_y)$.

Normieren Sie ihre Variablen mit der Frequenz des E-Feldes. Stellen Sie die normierten Bewegungsgleichungen (1) auf und lösen Sie sie! Plotten Sie die analytische Lösung $\vec{r}(t)$ für $t \in [0, 4\pi\gamma]$.

Simulieren Sie die Flugbahn des Elektrons und vergleichen Sie sie mit der analytischen Vorhersage! Wie ändert sich die Genauigkeit der numerisch gelösten Bahn für sehr kleine $\Delta t$? Wie klein muss $\Delta t$ gewählt werden, damit die maximale absolute Abweichung zwischen den Komponenten der analytisch berechneten Bahn und der numerischen Simulation am Ende der Simulation kleiner als $10^{-3}$ ist? Was passiert, wenn $\Delta t$ fixiert ist und $t$ sehr groß wird? Wie wirkt sich die Wahl von $E_0$ und $P_0$ auf den Fehler der Simulation aus?

**Teil 2**

Betrachten Sie ein Elektron, das an einem beliebigen Ort $\vec{r}_0$ in eine beliebige Richtung $\vec{p}_0$ startet. Die externen Felder seien $\vec{B} = \vec{0}$ und $\vec{E} = E_0\,(\cos(\omega t)\,\vec{e}_x + \sin(\omega t)\,\vec{e}_y)$. Bei einer Normierung der Bewegungsgleichung mit der Frequenz $\omega$ sei der Dämpfungsparameter $\Lambda = 1 \cdot 10^{-3}$.

Schätzen Sie das Fernverhalten der Lösung der Bewegungsgleichungen mit Strahlungsdämpfung (2) für $t \to \infty$ ab. Überlegen Sie sich dazu, welche Funktion die einzelnen Terme in Gleichung (2) haben.

Simulieren Sie die Flugbahn des Elektrons über einen Zeitraum, in dem ein ungebremstes Teilchen zehn Umläufe absolviert und vergleichen Sie sie mit der analytischen Vorhersage für den ungedämpften Fall! Vergleichen Sie auch die simulierte zeitliche Entwicklung von $\vec{p}(t)$ mit den analytischen Abschätzungen! Wie ändern sich die Simulationsergebnisse für verschiedene $E_0$, $\vec{r}_0$, $\Lambda$ und $\vec{p}_0$?

# Beispiel 3: homogenes E-Feld

**Teil 1**

Betrachten Sie ein Positron, das im Ursprung $\vec{r}_0 = \vec{0}$ ruht, d.h. es ist $\vec{p}_0 = \vec{0}$. Die externen Felder seien $\vec{B} = \vec{0}$ und $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$.

Normieren Sie ihre Variablen mit der Frequenz $\omega = (eE_0)/(m_0c)$. Stellen Sie die normierten Bewegungsgleichungen (1) auf und lösen Sie sie! Plotten Sie die analytische Lösung $\vec{r}(t)$ für $t \in [0, 10\omega]$. Zeigen Sie, dass sich das Positron nie schneller als Licht bewegt.

Simulieren Sie die Flugbahn des Positrons und vergleichen Sie sie mit der analytischen Vorhersage! Wie ändert sich die Genauigkeit der numerisch gelösten Bahn für sehr kleine $\Delta t$? Wie klein muss $\Delta t$ gewählt werden, damit die maximale absolute Abweichung zwischen den Komponenten der analytisch berechneten Bahn und der numerischen Simulation am Ende der Simulation kleiner als $10^{-3}$ ist? Was passiert, wenn $\Delta t$ fixiert ist und $t$ sehr groß wird? Ist das Positron in der Simulation irgendwann schneller als Licht?

**Teil 2**

Betrachten Sie ein Positron, das im Ursprung $\vec{r}_0 = \vec{0}$ ruht, d.h. es ist $\vec{p}_0 = \vec{0}$. Die externen Felder seien $\vec{B} = \vec{0}$ und $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$. $E_0$ sei dabei so gewählt, dass der Dämpfungsparameter $\Lambda = 1 \cdot 10^{-3}$ bei einer Normierung der Bewegungsgleichung mit der Frequenz $\omega = (eE_0)/(m_0c)$ ist.

Schätzen Sie das Fernverhalten der Lösung der Bewegungsgleichungen mit Strahlungsdämpfung (2) für $t \to \infty$ ab. Überlegen Sie sich dazu, welche Funktion die einzelnen Terme in Gleichung (2) haben.

Simulieren Sie die Flugbahn des Elektrons über einen Zeitraum, in dem ein ungebremstes Teilchen zehn Umläufe absolviert und vergleichen Sie sie mit der analytischen Vorhersage für den ungedämpften Fall! Vergleichen Sie auch die simulierte zeitliche Entwicklung von $\vec{p}(t)$ mit den analytischen Abschätzungen! Wie ändern sich die Simulationsergebnisse für verschiedene $E_0$, $\vec{r}_0$ und $\vec{p}_0$?

**Beliebte Fragen beim Antestat:**

1. Was ist eine Lagrange-Funktion?
2. Wie sieht die Lagrange-Funktion eines freien, nicht-relativistischen Teilchens aus?
3. Wie sieht die Lagrange-Funktion eines freien, relativistischen Teilchens aus?
4. Was versteht man unter einem relativistischen Teilchen?
5. Wie sieht die Lagrange-Funktion eines relativistischen Teilchens in einem elektromagnetischen Potential aus?
6. Was ist der Unterschied zwischen kinetischem und kanonischem Impuls?
7. Was ist das Hamiltonsche Prinzip?
8. Wie folgen die Euler-Lagrange-Gleichungen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung?
9. Wie sehen die Bewegungsgleichungen eines relativistischen, geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld aus?
10. Was versteht man unter einem expliziten Euler-Verfahren?
11. Was ist eine Dämpfungskraft?
12. Was muss gelten, damit der zweite Term in Gleichung (2) wirklich eine Dämpfung beschreibt?
13. Wie kann man den Wert den Schwingerfeldes leicht herleiten?
14. Was ist ein Vierervektor?
15. Was ist die relativistische Energie eines Teilchens?
16. Wie sieht der elektromagnetische Feldtensor aus?
17. Was ist eine Lorentz-Transformation?